

شبیه سازی مسئله شکستن سد بر روی بستر فرسایش پذیر با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته شده با نقاط همگام

بابک فضل‌ی مالیدره^۱، سید عباس حسینی^{۲*}

تاریخ دریافت: ۹۵/۷/۱۷ تاریخ پذیرش: ۹۵/۹/۱۳

چکیده

روشهای بدون شبکه طی دهه های اخیر به مجموعه روشهای عددی اضافه شده، و بستر مناسب و وسیعی را در زمینه های علمی، تحقیقاتی و مهندسی فراهم آورده‌اند. استفاده از روشهای بدون شبکه هنوز به گستردگی روشهای اجزاء محدود در مسائل مهندسی نمی‌باشد ولی چه بسا فعلاً این روشها شرایطی را مشابه با زمانی که روش اجزاء محدود شروع به گسترش نمود سپری می نمایند. در این تحقیق، روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته شده با نقاط همگام که اصطلاحاً (CDLSM) نام گرفته است، پیشنهاد گردیده و مفاهیم، روابط ریاضی و تنظیم مربوط به این روش به طور کامل ارائه گردیده اند. در این شبیه سازی نقاط همگام جهت کارائی بیشتر و زمان محاسبات پائین‌تر با استفاده از روش حداقل مربعات، و نیز استفاده از گروه به جای انتگرال (حالت گسسته) به کار برده شده است. بر اساس روش مذکور پدیده شکست آبی سد در حالات مختلف حل و جهت صحت سنجی آن نیز با مقایسه حل حاصل با حل تحلیلی مسائل آزمایشی معیار، و نیز داده‌های آزمایشگاهی موجود استفاده گردیده است. مقایسه بین نتایج عددی با داده های تحلیلی و آزمایشگاهی موجود، نشان می دهد که روش مزبور علاوه بر کارائی بالا، مباحث مربوط به تکانه یا ناپیوستگی را به‌خوبی شبیه سازی می نماید.

واژگان کلیدی: روش بدون شبکه، شکست سد، حداقل مربعات، بستر ثابت، بستر متحرک.

^۱ دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی آب، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران
^۲ دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی آب، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران
 Email: abbas_hoseyni@srbiau.ac.ir

مقدمه

در این تحقیق روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته شده با نقاط همگام (CDLSM) در جهت کاهش زمان اجرای برنامه در مسائلی با مقیاس بزرگ، کارایی و سهولت بیشتر در حل معادلاتی که جمله جابه جایی در آن غالب می باشد، معرفی شده است. از مزایای این روش، استفاده از نقاط همگام می باشد که موجب کاهش اندازه ماتریس سختی معادلات نهایی سامانه شده که این امر نیز موجب کاهش هزینه زمانی می گردد. همچنین، مزیت دیگر این روش استفاده از گروه به جای انتگرال در حل معادلات می باشد. تقریباً کلیه روشهای بدون شبکه نوع گسسته سازی معادله تفاضلی و همچنین ماتریس ضرایب در آنها به شکل انتگرالی می باشد، و عموماً برای حل این معادلات از انتگرال گیری عددی استفاده می شود که به کارگیری آن مستلزم تعریف شبکه نقاط گوس با وزنهای مربوطه می باشد، در حالی که در این روش، با استفاده از گروه و حذف مراحل انتگرال گیری، مفهوم واقعی تر و ساده تری از روش بدون شبکه ارائه می گردد.

جهت صحت سنجی و اعتبار روش، روش CDLSM در مورد انواع مختلفی از پدیده شکست سد مورد ارزیابی قرار می گیرد. نتایج حاصله با مجموعه ای از داده های آزمایشگاهی، و نیز جوابهای تحلیلی در صورت وجود مقایسه می گردند. لذا، معرفی و ارائه روش CDLSM به عنوان یکی از روشهای جدید در روشهای بدون شبکه، و ارزیابی این روش در مورد معادلات با جمله غالب جابه جایی از اهداف این تحقیق می باشد. پدیده شکست یکی از مسائلی است که معادلات حاکم در آن، بر اساس معادلات با جمله غالب جابه جایی می باشد، که بر پایه معادلات آبهای کم عمق استوار است و پدیده شکست سد بر روی بستر فرسایش پذیر به عنوان یک مرز متحرک در برخی از حالات شبیه سازی مورد توجه قرار گرفته است. همان گونه که در بخش بعد اشاره خواهد شد، فراسنج های مربوط به فرسایش در جمله منبع و چاه وجود داشته و بدلیل پیچیدگیهای موجود این فراسنج ها می توانند موجب ناپایداری در حل مسأله گردد. لذا، حل مسأله شکست سد بر روی بستر فرسایش پذیر در اعتبار سنجی روش معرفی شده بسیار موثر خواهد بود.

نیروز و همکاران (۱۹۹۲) اولین کسانی بودند که تقریب حداقل مربعات متحرک را در روش گالرکین معیار

به کار گرفته و آن را روش جزء پخش نامیدند. بلتیشکو و همکاران (۱۹۹۴) با انجام اصلاحاتی در مورد روش جزء پخش و تکمیل آن پایه گذار روش گالرکین مستقل از جزء شدند. در واقع، این روش را باید شروع به کارگیری حداقل مربعات در روشهای بدون شبکه دانست و همچنین قابلیت بعضی از روشها را برای ترکیب شدن با اجزاء محدود برای اعمال شرایط مرزی در حل معادله باید در مقاله بلتیشکو و همکاران (۱۹۹۶) یافت. اونیت و همکاران (۱۹۹۶) برای حل معادله جابجایی - پخش و مسائل جریان سیالات، از مربعات وزنی برای درون یابی در روش هم مکانی نقطه ای استفاده کردند. بونت و کالسرگام (۲۰۰۲) در ادامه فعالیتهای سال ۱۹۹۷ خود و حسنی (۱۹۹۷) روش موسوم به آب پویایی ذرات هموار اصلاح شده یا CSPH را به منظور اصلاح دقت و سازگاری روش هیدرودینامیک ذرات هموار و با اعمال تصحیح در مورد توابع کرنل ارائه نمودند. در مقاله ایشان، علاوه تصحیح توابع کرنل، با تصحیح انتگرالگیری و استفاده از انتگرال نقطه ای، توانمندی روش را با ارائه نتایج حل معادله پواسون در روش SPH و CSPH مقایسه کردند.

برخی از محققین مبادرت به حل معادلات آبهای کم عمق، که معادله با جمله غالب جابه جایی می باشد، با استفاده از روش تفاضل محدود پرداختند. شبیه سازی عددی دوبعدی جریان روی سرریز به وسیله آقای اونامی و همکاران (۱۹۹۹) ارائه گردیده است. روش اجزاء محدود گالرکین ناپیوسته برای حل معادلات آب کم عمق به وسیله آزینگر و همکاران (۲۰۰۲) به کار برده شد. ژوو و همکاران روش بدون شبکه ای را برای حل معادلات آب کم عمق با استفاده از توابع شکل RBF پیشنهاد کردند (۲۰۰۴). معادلات آب کم عمق با استفاده از روش حداقل مربعات با گره های دارای ساختار مورد ارزیابی قرار گرفته است (۲۰۰۶). روش اجزاء طبیعی (NEM)، بر اساس روش لاگرانژی، برای شبیه سازی معادلات آب کم عمق با وجود شیب های قوی مورد استفاده قرار گرفته است (۲۰۱۱). معادلات آب کم عمق به وسیله روش طول هموار متغیر SPH برای جواب مسئله شکست سد با هندسه های متفاوت تنظیم گردید (۲۰۰۵). روش مربعات حداقل گالرکین بدون شبکه (MGLS) به وسیله پن و همکاران (۲۰۰۵) با ترکیب روش همگام و گالرکین معرفی گردید. در این تحقیق روش گالرکین در مورد

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$E = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$F = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$S(U) = \begin{bmatrix} \alpha + \frac{E-D}{1-\phi} \\ -gh \frac{\partial z}{\partial x} - ghs_{fx} + B_x \\ -gh \frac{\partial z}{\partial y} - ghs_{fy} + B_y \end{bmatrix} \quad (5)$$

که در آن: B_x و B_y جملات منبع می‌باشند، که در حالت آب صاف برابر صفر بوده، و برای بستر فرسایش پذیر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_x = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 hu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 hu}{\partial y^2} \right) - \frac{(\rho_s - \rho_w)gh^2}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{(\rho_0 - \rho)(E-D)u}{\rho(1-\phi)} \quad (6)$$

$$B_y = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 hv}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 hv}{\partial y^2} \right) - \frac{(\rho_s - \rho_w)gh^2}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{(\rho_0 - \rho)(E-D)v}{\rho(1-\phi)} \quad (7)$$

همچنین، شکل غیر ابقایی (Nonconservative) یا شبه خطی (Quasi-linear) معادله (۱) در حالت یک بعدی معادله فوق به صورت زیر است:

$$U_t + AU_x = S(U) \quad (8)$$

که در آن بردارهای S و U همان تعریف قبلی را دارند و ماتریس A که ماتریس ژاکوبین ماتریس E می‌باشد، و داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 - \frac{(\rho_s - \rho_w)}{2\rho}ghc & 2u & \frac{(\rho_s - \rho_w)}{2\rho}gh \\ -uc & c & u \end{bmatrix} \quad (9)$$

در معادلات فوق t زمان، h عمق آب در نقطه مورد نظر، u و v به ترتیب مولفه‌های سرعت در جهات x و y ، متوسط گرفته شده در عمق، h عمق آب در نقطه مورد نظر، uh و vh به ترتیب بده واحد عرض در جهات x و y ، ارتفاع بستر، c شار متوسط غلظت رسوب حجمی، S_{fx} و S_{fy} به ترتیب شیب اصطکاکی در جهت‌های x و y ، E

شرایط مرزی اعمال گردید، به گونه‌ای که روش مربعات حداقل در محدوده داخل حل مورد استفاده قرار گرفت. جهت کمتر کردن مشکلات ناپایداری در روشهای همگام، روش بدون شبکه همگام مربعات حداقل (LSCM) توسعه داده شد (زانگ و همکاران ۲۰۰۱). در این روش به غیر از گره‌های بهره‌وری شده در ساخت توابع شکل، نقاط کمکی نیز مورد استفاده قرار گرفته و معادلات گسسته سامانه با ترکیب معادله تفاضلی و شرایط مرزی در این نقاط نمونه ایجاد گردید، به گونه‌ای که تعداد معادلات مسئله از تعداد مجهولات بیشتر بوده، و در نتیجه از روش مربعات حداقل جهت حل معادلات استفاده گردید. بررسی‌های عددی نشان می‌دهد که روش LSCM پایدار و کارآمد با دقت بالا بوده، منتها ماتریس ضرایب در این روش نامتقارن می‌باشد. روش بدون شبکه مربعات حداقل گسسته (DLMS) به وسیله ارزانی و افشار (۲۰۰۶ و ۲۰۰۷) معرفی گردیده است.

در این تحقیق، به منظور نظارت در برنامه عددی تهیه شده با کاربرد CDLSM، مثال متداولی که برای اعتبارسنجی شبیه‌سازی‌های عددی کاربرد دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای مطالعه جریانهای با سطح آزاد، انواع مختلف مسئله شکست سد که بر پایه معادلات آبهای کم عمق می‌باشد، کاربرد بسیار زیادی دارد. حل مساله شکست سد با استفاده روشهای عددی دیگر، قبلاً نیز به وسیله محققین مورد بررسی قرار گرفته است (کودو و همکاران ۲۰۰۵، بیسکارینی و همکاران ۲۰۱۰، هسو و همکاران ۲۰۱۱، پرستینزی ۲۰۰۸، لی و چانگ ۲۰۱۴، عطایی و همکاران ۲۰۰۸) مسائل مربوط به شکست سد انواع مختلفی دارد که تفاوت هر یک از این مسائل در جمله منبع (چشمه و چاه) موجود در معادلات آب کم عمق می‌باشد.

معادلات کلی حاکم بر پدیده شکست آبی سد بر

روی یک بستر متحرک

معادلات حاکم بر جریان سیالات، معادلات بقای جرم و بقای اندازه حرکت و غلظت با توجه به فرضیات بالا، به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$U_t + E_x + F_y = S(U) \quad (1)$$

دلیل اینکه غلظت نزدیک بستر از $(1 - \Phi)$ بیشتر نیست، بنابر این ضریب α_c به صورت $\alpha_c = \min(2, (1 - \Phi))$ محاسبه می گردد [۵۷]. θ فراسنج شیلدز می باشد و از رابطه زیر بدست می آید:

$$\theta = \frac{u_*^2}{sgd} \quad (۱۵)$$

که در آن $s = \rho_s / \rho_w - 1$ چگالی نسبی ذره، و u_* سرعت برشی است و از رابطه زیر به دست می آید:

$$u_*^2 = \sqrt{\frac{f}{8}} |u| = \sqrt{\frac{gn^2}{h^3}} |u| \quad (۱۶)$$

با استفاده از معادله بقای جرم رسوب، و تغییرات ارتفاع بستر بر اساس نرخ رسوب گذاری و رسوب برداری، تراز بستر قابل محاسبه می باشد:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{E - D}{1 - \phi} \quad (۱۷)$$

در حالت بستر متحرک جمله B_x ، B_y و معادله (۱۷) صفر در نظر گرفته می شوند.

روش حداقل مربعات گسسته بدون شبکه با نقاط همگام

رویکردی که در این مقاله ارائه شده است، کاربرد راهی نوین با استفاده از روش بدون شبکه می باشد که به مراحل ساده تری از گسسته سازی حوزه فیزیکی، و معادله دیفرانسیل تأکید دارد. ضمن اینکه روش پیشنهادی با حذف مراحل انتگرال گیری، مفهوم واقعی تری را از روش بدون شبکه دارا است. این روش، روش حداقل مربعات گسسته بدون شبکه با نقاط همگام می باشد که به اختصار CDLSM نامیده شده است، در این بخش معادلات مربوطه به صورت کلی ارائه خواهند شد.

فرمول بندی روش حداقل مربعات گسسته

روشهای مختلفی برای تولید توابع شکل در روشهای بدون شبکه وجود دارند، که از جمله می توان به روش های بیشینه ی انتروپی (ساکومار ۲۰۰۴، آرویو و اورتیز ۲۰۰۶)، روش کریجینگ متحرک (جو ۲۰۰۳)، تابع پایه شعاعی (لیو ۲۰۰۲ و ۲۰۰۵) و جزء بندی (ساکومار و همکاران ۲۰۰۴) اشاره کرد. تابع شکل حداقل مربعات متحرک (لنکستر و سانکوستاس ۱۹۸۱)، که در این

ضریب لزجت مغشوش یا ضریب گردابه ای، ϕ تخلخل رسوب بستر، E و D به ترتیب شار رسوب برداری و رسوب گذاری مرز بستر جریان (بیانگر تبادل رسوب بین ستون آب و بستر)، $\rho = \rho_w(1 - c) + \rho_s c$ چگالی مخلوط آب حاوی رسوب، $\rho_0 = \rho_w \Phi + \rho_s(1 - \Phi)$ چگالی مستغرق مصالح بستر، α نرخ رواناب در واحد طول، ρ_w و ρ_s به ترتیب چگالی آب و رسوب می باشند. اگر برای محاسبه عبارتهای اصطکاک از معادله مانینگ استفاده شود، خواهیم داشت:

$$s_{f_x} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{\frac{4}{3}}} \quad (۱۰)$$

$$s_{f_y} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{\frac{4}{3}}} \quad (۱۱)$$

که در آن n ضریب زبری مانینگ می باشد.

معادله ۱ بقای جرم را برای مخلوط آب - رسوب نشان می دهد. این معادله نسبت به معادلات متداول جریان آب صاف متفاوت است زیرا در این حالت جرم بین جریان آب و کف فرسایش پذیر در حال تبادل است. تعیین شار رسوب گذاری و رسوب برداری یکی از مهمترین مولفه های شبیه سازی انتقال رسوب و تغییر ریخت شناسی می باشد. روابط تجربی زیادی برای به دست آوردن فراسنج های رسوب پیشنهاد شده اند که در این تحقیق فراسنج های E و D به وسیله کاو و کارلینگ (۲۰۰۲) بصورت زیر پیشنهاد شده است:

$$D = w c_a \quad (۱۲)$$

$$E = \begin{cases} \varphi(\theta - \theta_c) |u| h & \text{if } \theta \geq \theta_c \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (۱۳)$$

که در آن، w سرعت سقوط ذره در آب ساکن بوده و از رابطه استوکس به صورت زیر به دست می آید:

$$w = \sqrt{(13.95v/d)^2 + 1.09\rho_s g d} - 13.95v/d \quad (۱۴)$$

در معادله فوق φ ضریبی برای مهار کردن نیروی فرسایش، θ_c فراسنج شیلدز بحرانی، v لزجت جنبشی آب، d قطر متوسط ذرات رسوب، c_a غلظت رسوب حجمی نزدیک بستر می باشند. مقدار c_a از رابطه $c_a = \alpha_c c$ به دست می آید، که در آن c غلظت رسوب حجمی متوسط در سیال و α_c ضریبی بزرگتر از یک است. به

$$a^T(x) = \{a_0(x) \ a_1(x) \ \dots \ a_m(x)\} \quad (۱۹)$$

بردار ضرایب $a(x)$ در معادله (۱۸) تابعی از x_i است. ضرایب $a(x)$ از کمینه کردن معیار گسسته وزنی L_2 به صورت زیر بدست می آیند:

$$J = \sum_{i=1}^n \widehat{W}(x - x_i) [p^T(x_i) a(x) - u_i]^2 \quad (۲۰)$$

در رابطه فوق، n تعداد نقاط گرهی در محدوده تاثیر x ، $\widehat{W}(x - x_i) \neq 0$ تابع وزنی و u_i فرانسج گرهی u در $x = x_i$ می باشد. در این مقاله از تابع وزنی هموار چندضابطه‌ای که در مراجع [۲۸ و ۲۹] توضیح داده شده است استفاده گردیده است. تقریب تابع مجهول u می تواند به صورت زیر نیز، که متداول تر است، نوشته شود:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i \quad (۲۰)$$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i \quad (۲۱)$$

در معادله فوق $N_i(x)$ تابع شکل در گره i می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$N = P^T A^{-1}(x) B(x) \quad (۲۲)$$

توابع شکل MLS شرایط دلتای کرونگر را ارضاء نمی کنند، در نتیجه در نقاط گرهی $u^h(x_i) \neq u_i$ می باشد. دقت درون یابی برای یک نقطه مورد نظر بستگی به تعداد نقاط در محدوده تاثیر دارد. همان طور که در شکل (۲) نشان داده شده است، برای یک نقطه همگام دلخواه مانند X_k ، شعاع محدوده تاثیر (d_s) به صورت زیر تعریف می شود:

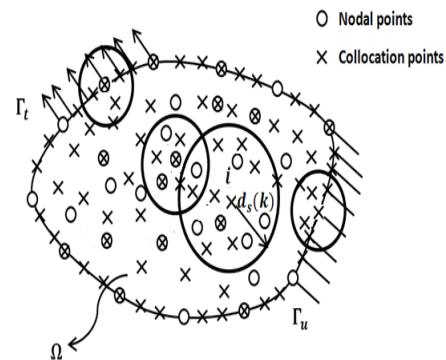
$$d_s = \alpha_s d_c \quad (۲۳)$$

که در آن α_s اندازه بدون بعد محدوده تأثیر، و d_c متوسط فاصله گرهی در اطراف تقطه X_k می باشد. عموماً، $\alpha_s = 2 \sim 3$ منجر به جوابهای مناسب در بسیاری از مسائلی که مورد مطالعه قرار گرفته اند می شود. در این تحقیق درجه تابع چند جمله ای در حالت یک بعدی یک ($P = [1; x]$) در نظر گرفته شده است.

گسسته سازی معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی با کاربرد روش حداقل مربعات گسسته

مقاله از آن استفاده شده است، یکی از معمول ترین توابع تخمینی در روشهای بدون شبکه به شمار می رود که به خوبی کارایی خود را نشان داده است. در این بخش در ابتدا به نحوه دستیابی به مقادیر توابع شکل با کاربرد حداقل مربعات متحرک و سپس گسسته سازی معادله دیفرانسیل با استفاده از زیرحوزه پرداخته می شود.

همان گونه که در شکل (۱) نشان داده شده است، محدوده فیزیکی و مرزهای مسئله بوسیله دو نوع نقطه تقسیم بندی شده است؛ این دو نقطه ۱- نقاط گرهی (Nodal Points) و ۲- نقاط همگام (Collocation Points) می باشند.



شکل ۱- محدوده تاثیر در روش بدون شبکه

روشهای زیادی برای ساختن توابع شکل در روش بدون شبکه وجود دارند. یکی از آنها حداقل مربعات متحرک (MLS) است که استفاده از آن بسیار متداول می باشد همان طور که در شکل (۲) مشخص است، اگر فرض شود که u یک متغیر وابسته از x باشد، آن گاه تقریب MLS، $u(x)$ بصورت $u_h(x)$ می باشد:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = P^T(x) a(x) \quad (۱۸)$$

که در آن $P(x)$ بردار چند جمله ای از مختصات مکانی، $x^T = [x]$ بردار مختصات مکانی نقاط و m تعداد چند جمله ای است. تابع چند جمله ای $P(x)$ معمولاً به صورت جملات مثلث خیام - پاسکال برای تامین شرط حداقل کامل بودن می باشد. در برخی از مسائل خاص توابع بیشتری را می توانند به چند جمله ای برای بهبود حل مسئله اضافه کنند. در معادله (۱۸)، $a(x)$ بردار ضرایب می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(x_k) = -U_h^n + \Delta t \left[A(U_h^n) \frac{\partial U_h^n}{\partial x} - S^n U_h^n \right] \quad (29)$$

$$R_\Omega^{n+1} = [L]\{A\} + \{F\} \quad (30)$$

باقی مانده شرط مرزی نیومن (R^t)، و شرط مرزی دیریچله (R^u)، نیز به صورت زیر می باشد:

$$R^{(t)}_{n+1} = B(U_h(x_k)) - g(x_k) \\ = \sum_{i=1}^{M_t} B(N_i(x_k)\phi_i^{n+1}) - g(x_k) \quad (31)$$

$$R^{(u)}_{n+1} = U_h(x_k) - \bar{U} \\ = \sum_{i=1}^{M_u} N_i(x_k)U_i^{n+1} - \bar{U} \quad (32)$$

در معادله فوق، M_d تعداد نقاط همگام در هر زیر حوزه داخل محدوده حل، M_t و M_u به ترتیب تعداد نقاط کالوکیشن در هر زیر حوزه در روی مرز نیومن و دیریچله است.

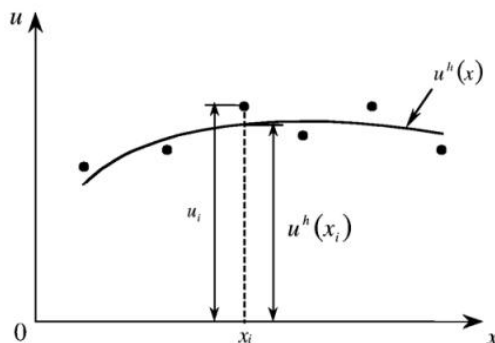
یکی از ویژگی های این روش این است که مجهولات به صورت توابع جبری در آمده، و در هر گره یا نقطه می توان بصورت جبری از توابع شکل مشتق گیری کرد، که موجب سهولت در گسسته سازی معادلات در محدوده حل می گردند.

روش کمینه کردن تابع خطا بر پایه Method Penalty می باشد، که در آن تابع خطا در محدوده میدان حل و مرزهای دیریچله و نیومن با استفاده از ضرایبی کمینه می گردد.

$$I = \sum_{k=1}^{M_\Omega} R_\Omega(X_k)^2 + \alpha_t \sum_{k=1}^{M_t} R_t(X_k)^2 \\ + \alpha_u \sum_{k=1}^{M_u} R_u(X_k)^2 \quad (33)$$

که در آن: M_Ω ، تعداد نقاط همگام (Collocation Points) در داخل محدوده حل، M_t ، تعداد نقاط همگام بر روی مرز نیومن و M_u ، تعداد نقاط همگام بر روی مرز دیریچله می باشند. در واقع در معادله فوق می بایست تابع خطا را بر حسب مجهولات گرهی کمینه نمود.

با فرض اینکه شکل کلی معادلات آبهای کم عمق در حالت یک بعدی به شکل زیر باشد:



شکل ۲- تابع تقریب $u_h(x)$ و فراسنج های گرهی در روش حداقل مربعات متحرک

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = Q(U) \quad i \\ = 1, 2 \quad \text{on } \Gamma_\Omega \quad (24)$$

با شرایط مرزی نیومن و دیریچله به شکل زیر:

$$B(U) = g \quad \text{on } \Gamma_t \quad (25)$$

$$U = \bar{U} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (26)$$

در معادلات وابسته به زمان گسسته سازی، معادلات براساس روش (θ -method) انجام می شود، که بر اساس آن مقدار خطا، در نقاطی خاص (نقاط همگام) درون میدان حل کمینه می گردند.

با فرض $Q(U) = SU$ ، و استفاده از تقریب تابع مجهول u معادله (۲۱) و جای گذاری آن در معادله (۲۴) داریم:

$$R^{(\Omega)}_{n+1} \\ = \sum_{i=1}^{M_d} N_i(x_k)\phi_i^{n+1} \\ + \Delta t \theta \left[A(U_h^n) \sum_{i=1}^{M_d} \frac{\partial N_i(x_k)}{\partial x} \phi_i^{n+1} - S^n \sum_{i=1}^{M_d} N_i(x_k)\phi_i^{n+1} \right] + \quad (27)$$

$$\Delta t (1 - \theta) \left[A(U_h^n) \frac{\partial U_h^n}{\partial x} - S^n U_h^n \right] - U_h^n \\ L(x_k) = N(x_k) + \Delta t \theta \left[A(U_h^n) \times \frac{\partial N(x_k)}{\partial x} - S^n \times N(x_k) \right] \quad (28)$$

افزایش تعداد گره‌ها منجر به جوابهای دقیقتر می‌شود، اما حجم محاسبات نیز در مسائل بالاتر رفته و موجب افزایش هزینه حل مسائل خواهد بود. لذا، بین تعداد گره‌ها (Nodal Points) و نقاط (Collocation Points)، با توجه به هر مسئله براساس دقت مورد نیاز می‌بایست رابطه‌ی ای منطقی ایجاد گردد. لازم به ذکر است حوزه تاثیر یک نقطه در اجزاء محدود مجموع حوزه‌هایی است که این نقطه در آنها وجود دارد. نقطه مشترک در روشهای بدون شبکه توابع وزنی، یا به عبارتی توابع پنجره ای می‌باشند، که خصوصیت اصلی آن دارا بودن مقادیر غیر صفر در داخل زیرحوزه، و صفر در خارج از آن است. زیر حوزه‌ها عموماً به صورت دایره، کره و مستطیل در نظر گرفته می‌شوند. همچنین، بعضی از نقاط می‌توانند به صورت مشترک در تعدادی از حوزه‌های تأثیر وجود داشته باشند.

کاربرد شبیه سازی عددی و صحت سنجی آن

با توجه به موارد گفته شده، مسائل آزمایشی (test Problem) که برای ارزیابی روشهای عددی حل معادلات آبهای کم عمق و بستر در این تحقیق استفاده خواهد شد، شامل موارد زیر است:

مسئله شکست سد در یک بعد بدون احتساب اثر جملات منبع به عنوان یک مسئله آزمایشی، برای ارزیابی شبیه سازی های عددی یک بعدی در حل معادلات آبهای کم عمق. (TEST Problem A)

مسئله شکست سد در یک بعد با احتساب اثر جملات منبع بر روی بستر ثابت به عنوان یک مسئله آزمایشی، برای ارزیابی شبیه سازی های عددی یک بعدی در حل معادلات آبهای کم عمق. (TEST Problem B)

مسئله شکست سد در یک بعد بر روی بستر متحرک به عنوان یک مسئله آزمایشی، برای ارزیابی شبیه سازی های عددی یک بعدی در حل معادلات آبهای کم عمق. (TEST Problem C)

مسئله یک بعدی شکست سد (test Problem A)

در این حالت یک آبراهه مستطیلی افقی بدون اثر اصطکاک (ضریب زبری مانینگ صفر) به طول $L=1000m$ که موقعیت سد در وسط آن قرار دارد ($x_{dam} = 500m$) در نظر گرفته شده است. عمق آب در بالادست $d_0 =$

با کمینه کردن معادله (۳۳) نسبت به فراسنج گرهی u_i داریم:

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^{N_d} \frac{\partial R_k^{(d)}}{\partial u_i} R_k^{(d)} + \alpha \sum_{k=1}^{N_t} \frac{\partial R_k^{(t)}}{\partial u_i} R_k^{(t)} + \beta \sum_{k=1}^{N_u} \frac{\partial R_k^{(u)}}{\partial u_i} R_k^{(u)} = 0 \quad (34)$$

با جایگزین کردن معادلات (۳۰)، (۳۱) و (۳۲) در معادله (۳۳) سامانه ماتریس کل بصورت زیر به دست می‌آید:

$$KH = F \quad (35)$$

که در آن مؤلفه های ماتریس و بردار به صورت زیر می‌باشند:

$$K_{lm} = \sum_{k=1}^{N_d} [L(N_l)]_i^T [L(N_m)]_i + \alpha \sum_{k=1}^{N_t} [B(N_l)]_i^T [B(N_m)]_i + \beta \sum_{k=1}^{N_u} [(N_l)]_i^T [(N_m)]_i \quad (36)$$

$l, m = 1, 2, \dots, n$

$$F_l = \sum_{k=1}^{N_d} [L(N_l)]_i^T f_i + \alpha \sum_{k=1}^{N_t} [B(N_l)]_i^T g_i + \beta \sum_{k=1}^{N_u} [(N_l)]_i^T \bar{U} \quad (37)$$

لازم به ذکر است در پدیده شکست سد با بستر فرسایش پذیر، با توجه به وجود ۵ جمله در جملات چشمه و چاه معادلات اندازه حرکت، جهت تأثیر هریک از جمله‌ها معادلات با استفاده از روش گسسته سازی دو مرحله ای معیار معادله به شکل زیر حل خواهند شد:

$$U^* = U^n - \Delta t A \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^n \quad (38)$$

$$U^{n+1} = U^* + \Delta t [Q(U)]^n \quad (39)$$

پس از حل معادلات (۳۸) و (۳۹)، با استفاده از روش CDLSM، تغییر تراز سطح بستر برای پدیده شکست آبی سد، به صورت:

$$Z^{n+1} = Z^n + \Delta t \left[\frac{D-E}{1-\phi} \right]^n \quad (40)$$

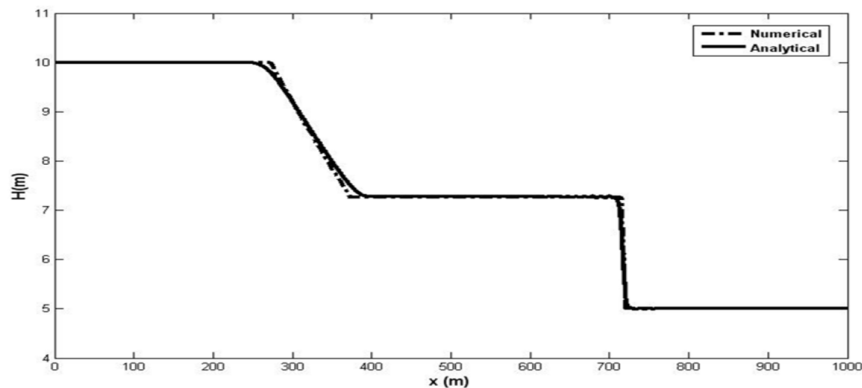
به دست می‌آید.

ابعاد شبکه حل شده است و برای گام زمانی از معیار CFL که به صورت رابطه ی زیر می باشد، استفاده گردیده است:

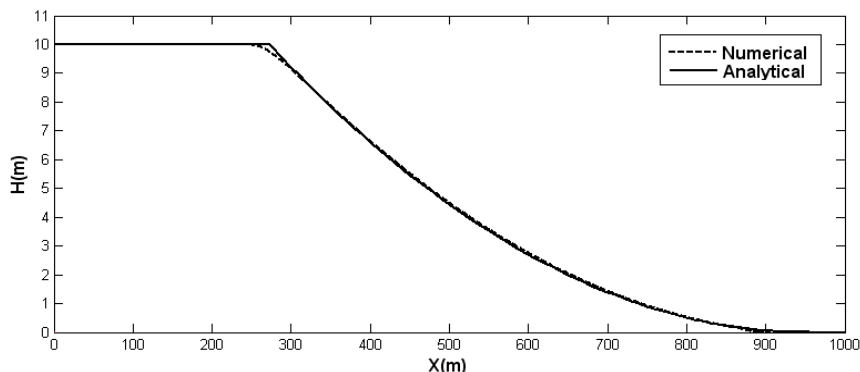
$$\Delta t = C_t \min \left\{ \frac{\Delta x}{|U| + C} \right\} \quad (41)$$

در رابطه ی فوق، $C = \sqrt{gd_0}$ سرعت انتشار موج و C_t عدد کورانت است که مقدار آن باید کمتر از یک باشد.

10m و در پایین دست در حالت بستر تر $d_{down} = 2m$ و در حالت بستر خشک صفر بوده و سرعت های اولیه در بالادست و پایین دست صفر در نظر گرفته می شود. شکل نیمرخ سطح آب پس از پدیده شکست سد در شکل های (۳) و (۴) ارائه شده و با حل تحلیلی مقایسه گردیده اند. لازم به توضیح است که حل تحلیلی آنها نیز در شرایط مشابه در شکل های مذکور مشاهده می شود. شبیه سازی عددی با در نظر گرفتن مقادیر ۱۰ متر برای



شکل ۳: نیمرخ عمق مسئله شکستن سد در حالت بستر تر



شکل ۴: نیمرخ عمق مسئله شکستن سد در حالت بستر خشک

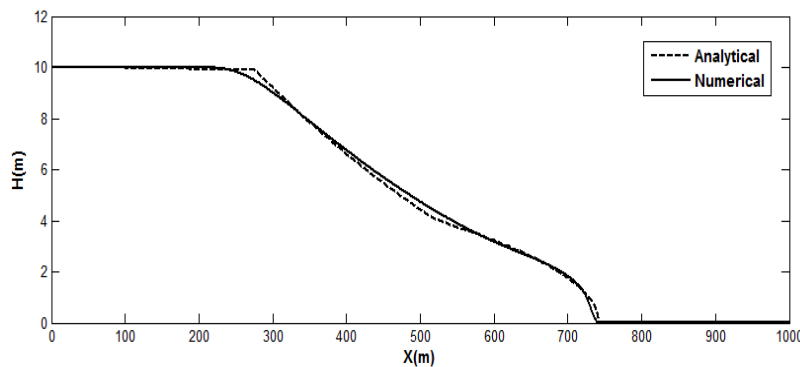
در شکل (۵) نیمرخ سطح آب برای شبیه سازی عددی و شبیه سازی تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفته است. همان طور که ملاحظه می گردد اختلافاتی بین نتایج نیمرخ سطح آب قابل مشاهده است. بخشی از این اختلافات به واسطه خطاهای شبیه سازی عددی بوده، و بخشی از آن به واسطه فرضیات ساده کننده (صرف نظر نمودن از شتاب قائم و لختی) در شبیه سازی تحلیلی می باشد که تا حدودی بر نتایج تأثیر گذار بوده اند. نکته مهمی که در این شکل ها قابل تفسیر است آن که فرض در نظر گرفته شده در شبیه سازی تحلیلی مبنی بر تقسیم جریان به دو بخش پیشانی، که اثر زبری تأثیر خود را نشان می دهد، و قسمت انتهائی، که فرض می

مسئله آزمایشی یک بعدی (test Problem B)

در این حالت پدیده ی شکستن سد در یک آبراهه مستطیلی افقی به طول $L=1000m$ با زبری مانینگ $n=0.03$ که موقعیت سد در وسط آن قرار دارد ($x_{dam} = 500m$) مورد بررسی قرار گرفته است. عمق آب اولیه در بالادست $d_0 = 10m$ و در پایین دست صفر بوده، و سرعت های اولیه در بالادست و پایین دست صفر منظور می شود. فرض می گردد که سد به طور ناگهانی شکسته می شود. با توجه به توضیحات و فرضیات فوق، شبیه سازی عددی انجام، تا در این حالت تأثیر زبری بر مؤلفه های جریان مورد ارزیابی قرار گیرد.

پیشانی جریان وجود داشته، و در قسمت انتهایی جریان نتایج شبیه سازی عددی و تحلیلی با هم تطبیق دارند.

گردد رفتار جریان مطابق سیال مطلوب می باشد فرض درستی بوده، و اثرات زبری تنها در بخش جلویی و



شکل ۵: نیمرخ عمق مسئله ی شکستن سد در حالت بستر خشک با ضریب مانینگ ۰/۰۳

مقطع مستطیلی استفاده شده است. تفاوت اساسی بین این دو آزمایش در نوع مصالح رسوبی استفاده شده در کف آبراه می باشد. نهر پایه دار مورد استفاده در آزمایش تایوان ۱/۲ متر طول، ۰/۲ متر عرض و ۰/۷ متر ارتفاع داشت. این نهر پایه دار در ابتدا با لایه ای به ضخامت ۵ تا ۶ سانتی متر با مرواریدهای مصنوعی سبک به قطر ۶/۱ میلی متر، چگالی نسبی ۱/۰۴۸ و سرعت سقوط ۰/۰۷۶ متر بر ثانیه و تخلخل ۰/۲۸ پر شده است. در آزمایش لوون، نهر پایه داری به طول ۲/۵ متر، عرض ۰/۱ متر با ارتفاع ۰/۳۵ متر ساخته شده بود. گلوله های استوانه ای پی وی سی با قطر کروی معادل ۳/۵ میلی متر، چگالی نسبی ۱/۵۴ و سرعت سقوط ۰/۱۸ متر بر ثانیه و ضخامت اولیه رسوبی ۵ تا ۶ سانتی متر با تخلخل ۰/۳ بر روی بستر ثابت نهر پایه دار قرار داده شدند.

در هر دو آزمایش، دریچه ای در وسط نهر پایه دار قرار داشت که آب با ارتفاع ۱۰ سانتی متر را در بالادست از بستر خشک پائین دست جدا می کرد. در زمان $t = 0$ ثانیه، دریچه به طور سریع برای ایجاد پدیده شکستن سد برداشته شده بود. در هر دو حالت بده در واحد عرض (hU)، بده رسوب (hC) و فراسنج تغییرات ارتفاع بستر (Z) صفر فرض شده است. تخلخل بار رسوبی بستر به ترتیب ۰/۲۸ و ۰/۳ برای آزمایش تایوان و لوون با ضریب زبری بستر $n = 0.025 \frac{s}{m^3}$ می باشد و چگالی آب $\rho_w = 1 \frac{g}{cm^3}$ می باشد.

فراسنج θ_c به صورت تقریبی برای بافت درشت دانه برای دامنه قطر بین ۶/۱-۳/۵ برابر ۰/۰۵ فرض شده

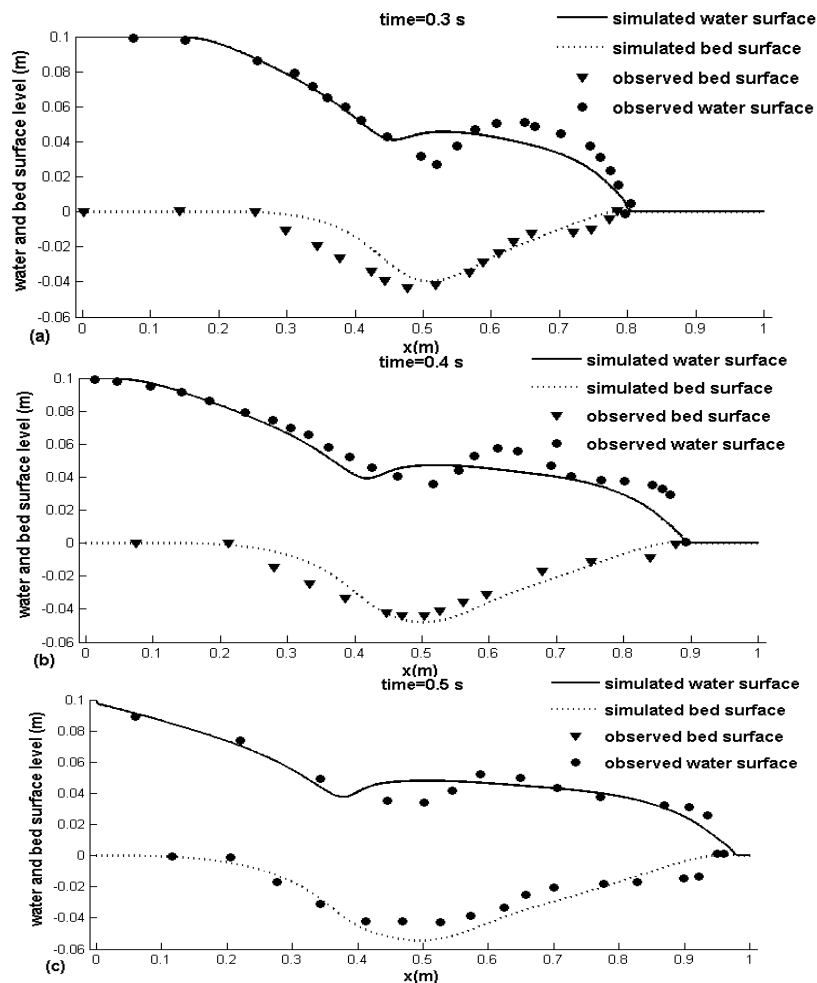
مسئله آزمایشی یک بعدی C

معادله ارائه شده در بخش قبلی بیانگر بقای جرم برای مخلوط آب و رسوب می باشد. فرق بین این معادلات با معادلات آب صاف در تبادل جرم بین جریان و بستر فرسایش پذیر است (جمله E و D). همان گونه که کاو و همکاران (۲۰۰۴) بیان کردند، این فراسنج ها بسیار مهمند، نه تنها برای این که در جریان های با کارمایه ی بالا مانند شکست سد اتفاق می افتند، بلکه در سامانه های رودخانه ای دارای اهمیت می باشند. جمله های سمت چپ معادلات آب کم عمق بیانگر تأثیر نیروی لختی، و اثرات فشار در جریان سیال می باشد. جملات سمت راست این معادله، جمله های مربوط به جملات چشمه و چاه، مربوط به پستی و بلندی و شیب بستر، افت اصطکاکی، انتقال اندازه حرکت آشفته پخش مربوط به تنش رینولدز، تغییرات مکانی در غلظت رسوب و انتقال اندازه حرکت به واسطه تبادل رسوب بین جریان و بستر فرسایش پذیر می باشند. دو جمله انتهایی تنها در جریان های با غلظت بالا اهمیت دارند. مهم ترین هدف در این بخش نمایش عملکرد مناسب روش معرفی شده CDLSM، که در بخش قبل توضیح داده شد می باشد و قابلیت حل مسئله شکستن سد بر روی بستر فرسایش پذیر مورد ارزیابی قرار می گیرد.

شرایط در نظر گرفته شده مطابق با یک نمونه آزمایشگاهی که در دانشگاه های لوون بلژیک و تایوان انجام شده می باشد (فراکارولو ۱۹۹۵، کاپارت و یانگ ۱۹۹۸). در هر دو آزمایش از یک نهر پایه دار منشوری با

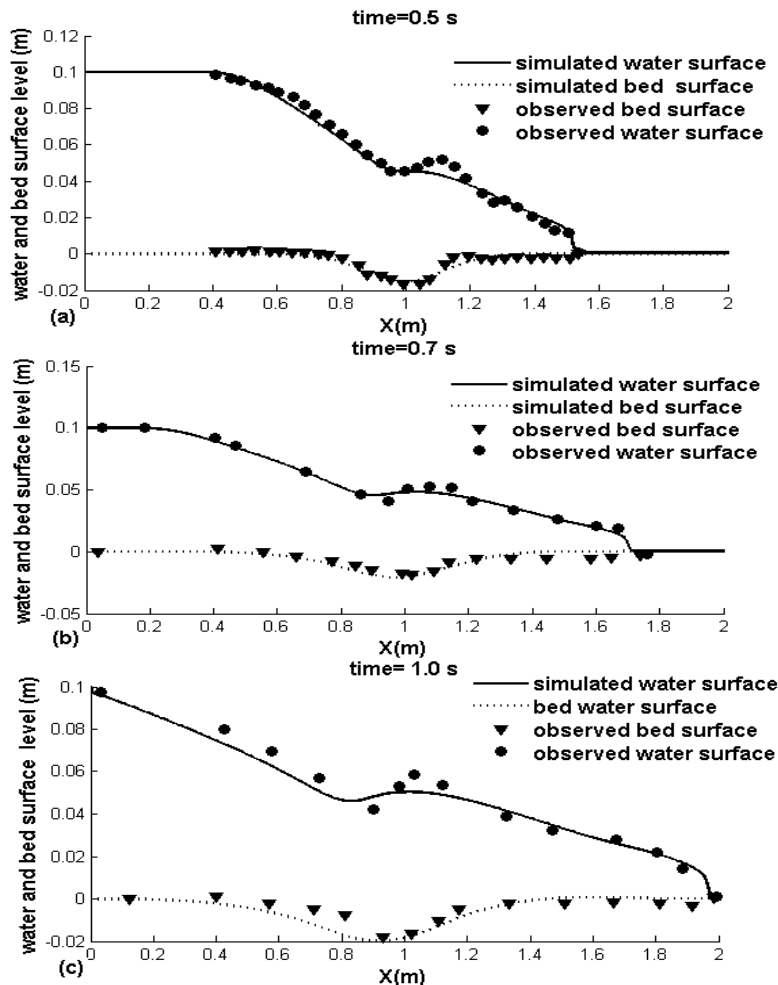
شکل های (۶) و (۷) مقایسه بین ارتفاع سطح آزاد آب و نیمرخ بستر را در پدیده شکستن سد فرسایش پذیر در آزمایش تایوان و لوون نشان می دهد. همان گونه که در این شکل ها ملاحظه می شود، فرسایش پذیری کف تأثیرات قابل ملاحظه ای بر نتایج در مقایسه با بستر ثابت، می گذارد، که این اشاره می تواند در پیش بینی سیل بسیار مهم باشد.

است. فراسنج ϕ با استفاده از داده های آزمایشگاهی آزمایش تایوان و لوون به ترتیب برای زمان $0/3$ و $0/5$ ثانیه واسنجی شده است و این فراسنج واسنجی شده برای پیش بینی جریان و بار رسوب برای دو زمان دیگر مورد استفاده قرار می گیرد. مقادیر واسنجی شده ϕ برای آزمایش تایوان $\phi = 5.5$ و برای آزمایش لوون $\phi = 1.5$ بدست آمده اند. در هر دو آزمایش از شبکه بندی یکنواخت با اندازه $0/005$ متر و معیار گام زمانی CFL استفاده شده است.



شکل ۶: تراز سطح آب و بستر در آزمایش تایوان در زمانهای

(a) $t=0.3$ s, (b) $t=0.4$ s, and (c) $t=0.5$ s.



شکل ۷: تراز سطح آب و بستر در آزمایش لوون در زمانهای

(a) $t=0.5$ s, (b) $t=0.7$ s, and (c) $t=1.0$ s.

در مرحله اول، برای به دست آوردن مقادیر توابع شکل در هر نقطه فرضی در داخل حوزه حل، از حداقل مربعات متحرک وزنی استفاده شده، سپس معادله تفاضلی گسسته شده با استفاده از روش زیر حوزه حل می‌گردد. همانند کلیه روشهای بدون شبکه، و برخلاف روش اجزاء محدود، تابع شکل و مشتقات آن به صورت صریح در فرمول بندی اعمال نمی‌شود، بلکه مقادیر توابع شکل با به کارگیری حداقل مربعات متحرک وزنی برای کلیه نقاط داخل حوزه و نقاط مرزی به دست می‌آیند. محدوده حل مسئله در این روش به وسیله تعدادی از نقاط گسسته گردید، سپس با استفاده از روش تابع شکل حداقل مربعات متحرک ماتریس سختی متقارنی ایجاد شد. در این روش، از نقاط همگام یا نقاط نمونه استفاده شده که مجموع مربعات خطا در نقاط همگام در کل محدوده حل و در مرزها حداقل در نظر گرفته می‌شود و

کاربرد فرانسج های واسنجی گردیده در نرم افزار پیشنهاد شده، موقعیت موج و اندازه بستر را مطابق با داده های آزمایشگاهی نشان می‌دهد.

نتیجه گیری

در این تحقیق رفتار موج ناشی از شکستن سد با استفاده از روش بدون شبکه ی گسسته حداقل مربعات با نقاط همگام مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حاکم به صورت کامل با کمک روش عددی در حالت یک بعدی حل گردید و نتایج در سه بخش بر روی بستر ثابت بدون چشمه و چاه، بر روی بستر ثابت با در نظر گرفتن جمله های چشمه و چاه، و بر روی بستر متحرک و فرسایش پذیر نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی موجود مورد مقایسه قرار گرفتند. که نتایج حاصله در ادامه به صورت خلاصه آورده شده اند:

- 7) Bonet, J., Hassani, B., Lok, L.T., Kulasegaram, S. 1997. Corrected smooth particle hydrodynamics- a reproducing kernel meshless method for computational mechanics in UK-5th ACME Annual Conference.
- 8) Unami, K., Kawachi, T., Munir, B.M., Itagaki, H. 1999. Two dimensional numerical model of spillway flow. *Journal of Hydraulic Engineering*. 5: 369-375.
- 9) Aizinger, V., and Dawson, C. 2002. A discontinuous Galerkin method for two dimensional flow and transport in shallow water. *Advances in Water Resources*, 25: 67-84
- 10) Zhou, X., Hon, Y.C. and Cheung, K.F. 2004. A grid-free, nonlinear shallow-water model with moving boundary. *Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements*. 28: 967-973.
- 11) Arzani, H. 2006. A meshless method for the solution of shallow water equations. Doctoral Dissertation. School of Civil Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran.
- 12) Darbani, M., Ouahsine, A., Villon, P., Naceur, H. and Smaoui, H. 2011. Meshless method for shallow water equations with free surface flow. *Applied Mathematics and Computation*. 217: 5113-5124
- 13) Rodriguez-Paz, M. and Bonet, J. 2005. A corrected smooth particle hydrodynamics formulation of the shallow-water equations. *Computers & Structures*. 83:1396-1410.
- 14) Pan, X.F., Zhang, X. and Lu, M.W. 2005. Meshless Galerkin least-square method. *Computational Mechanics*. 35: 182-189.
- 15) Zhang, X., Liu, X.H., Song, K.Z. and Lu, M.W. 2001. Least-squares collocation meshless method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 51: 1089-1100.
- 16) Arzani, H., and Afshar, M.H. 2006. Solving Poisson's equations by the discrete least square meshless method. *Proceeding of 28th Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM28)*, Skiathos, Greece
- 17) Arzani, H., and Afshar, M.H. 2007. Solution of spillways flow by discrete least square meshless methods. *Proceeding of Second ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods*, Porto, Portugal
- 18) Quecedo, M., Pastor, M., Herreros, M.I., Fernandez Merodo, J.A. and Zhang, Q. 2005. Comparison of Two Mathematical Models for Solving the Dam Break Problem Using the FEM Method. *Journal of Computation Methods Applied Mechanic Engineering* 194: 3984-4005.
- 19) Biscarini, C., Di Francesco, S. And Manciola, P. 2010. Water resources Research And Documentation center. Villa La Colombella 0634 Perugia, Italy, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 14: 705-718.
- 20) Hsu, Hung-Chu. Kao, Ping-Chiao. Hwung, Hwung-Hweng. 2011. Numerical and

نقاط گرهی نیز جهت ساخت توابع شکل حداقل مربعات متحرک استفاده می گردد.

جهت افزایش دقت مسئله هم می توان تعداد نقاط گرهی را اضافه نمود و هم تعداد نقاط همگام را بیشتر در نظر گرفت. با این حال زیاد شدن تعداد نقاط گرهی باعث افزایش ماتریس ضرایب معادلات نهائی سامانه می گردد، که این حالت موجب افزایش زمان اجرای برنامه و عدم کارائی روش، و نیز در برخی حالات اگر تعداد نقاط گرهی خیلی زیاد شود با مشکل حافظه رایانه برخورد می نمائیم. برای رفع این مشکل می توان به جای افزایش تعداد نقاط گرهی، تعداد نقاط همگام را افزایش داد بدون اینکه اندازه ماتریس ضرایب افزایش یابد. در واقع، اصلی ترین دلیل استفاده از نقاط همگام نیز به همین دلیل می باشد. جهت صحت سنجی شبیه سازی انواع مختلفی از پدیده شکستن سد با جملات چشمه و چاه متفاوت، مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج به روشنی بیانگر دقت زیاد روش CDLSM استفاده شده در حل مسائل مربوط به پدیده شکستن سد می باشد. همچنین، با توجه به کارائی بالای روش، استفاده از آن در مسائلی با مقیاس بزرگ نیز به سهولت قابل اجرا می باشد.

منابع

- 1) Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P. 1992. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse element. *Coput. Mech*. 10:307-318.
- 2) Belytschko, T., Gu, L., Lu, Y.Y. 1994. Fracture and crack growth by element free Galerkin methods. *Model. Simul. Mater. Sci. Engng*. 2: 519-534.
- 3) Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., Krysl, P. 1996. Meshless methods: A n overview and recent development, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*. 139: pp. 3-47.
- 4) Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Sacco, C. 1996. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*. 139: 315-346.
- 5) Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. 1996. A finite point method in computational mechanics applications to convective transport and fluid flow", *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 39: 3839-3866.
- 6) Bonet, J., Kulasegaram, S. 2002. A simplified approach to enhance the performance of smooth particle hydrodynamics methods. *Applied Mathematics and Computation*. 126:133-155.

- 33) Capart, H., and Young, D. 1998. Formation of a jump by the dam-break wave over a granular bed. "J. Fluid Mech. 372:165 – 187.
- Experimental study of dam-break flood propagation and its implication to sediment erosion. Proceedings of the 33rd Ocean Engineering Conference in Taiwan National Kaohsiung Marine University.
- 21) Prestininzi, Pietro. 2008. Suitability of the diffusive model for dam break simulation: Application to a CADAM experiment. Dipartimento di Scienza dell'Ingegneria Civile, Università di Roma Tre, Via Vito Volterra 62 - 00146 Rome, Italy, Journal of Hydrology. 361: 172– 185.
- 22) Lei, Fu., Yee-Chung, Jin. 2014 Simulating Velocity Distribution of Dam Breaks with the Particle Method. American Society of Civil Engineers. 10.1061/ (ASCE) HY.1943-7900.0000915, 04014048(10).
- 23) Ataie-Ashtiani, B., Shobeiry, G., Farhadi, L. 2008 Modified Incompressible SPH method for simulating free surface problems. Fluid Dynamics Research. 40(9): 637- 661.
- 24) Cao, Z., Carling, P. 2002. Mathematical modelling of alluvial rivers: reality and myth. Part I: General overview. Water Maritime Eng. 154 207–220.
- 25) Sukumar, N. 2004. Construction of polygonal interpolants: a maximum entropy approach. International journal for numerical methods in engineering. 61(12): 2159-2181.
- 26) Arroyo, M., Ortiz, M. 2006. Local maximum entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods, International journal for numerical methods in engineering. 65(13): 2167-2202.
- 27) Gu, L., 2003. Moving kriging interpolation and element free Galerkin method, International journal for numerical methods in engineering, 56(1): 1-11.
- 28) Liu, G.R. 2002 Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. 1st Ed. CRC Press. Boca Raton, USA.
- 29) Liu, G.R., Gu, Y.T. 2005. An Introduction to Meshless Methods and their Programming. 1st Ed. Springer Press. Berlin, Germany.
- 30) Sukumar, N., Huang, Z., Prévost, J. H., Suo, Z. 2004. Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. International journal for numerical methods in engineering. 59(8): 1075-1102.
- 31) Lancaster, L., Salkauskas, P. K. 1981. Surfaces generated by moving least squares methods. Mathematics of computation. 155(37): 141-158.
- 32) Fraccarollo, L., and Toro, E. F. 1995. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems. J. Hydraul. Res. 33(6): 843 – 864.

